Epreuve écrite de Mathématiques C 2012
ENS de Cachan, Lyon et Paris
Jury : Elise Fouassier, David Gérard-Varet, Daniel Han-Kwan, Adrien Joseph et Erwan Le Pennec

L'épreuve de Mathématiques-C-(ULC) 2012 portait sur l'étude des nombres de Pisot. Ce sujet présentait l'avantage de tester les candidats sur des domaines variés du programme de classes préparatoires : arithmétique élémentaire, polynômes, algèbre linéaire, séries, séries entières.

Le niveau des copies était très correct, avec quelques excellentes copies. Les notes se sont étalées de 0 à 20, avec une moyenne de 7,1 et un écart type de 4.

De manière générale, les correcteurs ont été très attentifs à la rédaction. Par ailleurs, les candidats ayant traité de manière superficielle le sujet ont été très peu récompensés ; au contraire, la résolution de certaines questions délicates a été largement valorisée.

Nous regroupons à présent quelques remarques plus précises sur chacune des parties du sujet.

1 Partie 1

Montrer que I_θ était un idéal ne posait pas de problème. En revanche, de trop nombreux candidats en ont déduit directement l'existence de Π_θ, alors qu'il fallait mentionner le fait que l'idéal n'était pas nul. L'hypothèse sur θ (nombre algébrique) garantissait ce dernier point.

De trop nombreux candidats n'ont pas assez argumenté dans la question 2 ; l'existence des entiers p et N, introduits dans l'indication, devait être justifiée. Certains candidats n'ont introduit que le diviseur premier p et ont travaillé dans l'anneau intègre $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, fournissant une preuve plus rapide du résultat.

La question 3 a été assez mal traitée. Il s'agissait de remarquer qu'il existait $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $Q \in \mathbb{Q}[X]$ unitaires tels que $P = \Pi_\theta Q$. On pouvait dans un premier temps multiplier Π_θ et Q par des entiers afin d'obtenir des polynômes à coefficients entiers, puis diviser ces derniers par le pgcd de leurs coefficients afin d'obtenir finalement des polynômes primitifs. Il suffisait alors d'appliquer la question 2.

A la question 4, il suffisait de remarquer que $\overline{\theta}$ est une racine du polynôme réel Π_θ de module supérieur à 1.

La question 5 ne posait pas non plus de difficulté, mais les correcteurs regrettent que la rédaction ait été parfois approximative (utilisation des théorèmes de comparaison pour les séries à termes positifs sans vérifier cette positivité). On pouvait constater que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n$ est réel et $\sin^2\left(\pi \displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^n\right)$ est égal au terme général de la série à étudier. L'utilisation d'une majoration ou d'un équivalent du terme général permettait alors de conclure.

2 Partie 2

La question 1 ne posait pas de difficulté : les β_n correspondaient aux coefficients de Q : $Q(z) = \sum_{k=0}^{p} \beta_k z^{p-k}$. Il ne fallait cependant pas oublier de préciser que le domaine était un ouvert non vide pour invoquer l'unicité de la décomposition.

La question 2 était plus subtile. Il était naturel de poser $Q(z) = \sum_{k=0}^{p} \beta_k z^{p-k}$ et d'obtenir, sur le domaine de définition, une égalité de la forme $P(z) = f(z)Q(z)$. Avant de pouvoir écrire $f(z) = P(z)/Q(z)$, il fallait s'assurer que Q ne s'annulait pas sur le domaine. Ceci n'est pas garanti par les hypothèses. Cependant comme toute racine de Q sur le domaine est une racine de P, on pouvait bien se ramener au cas où Q n'a pas de racine sur le domaine, ce qu'il fallait mentionner.

A la question 3, il suffisait de remarquer que les vecteurs colonnes du déterminant proposé formaient une famille liée à partir d'un certain rang.

Dans la question 4.(a), il ne fallait pas oublier d'utiliser la minimalité de p pour justifier le coefficient 1 devant c_{j+p}. Les questions 4.(b) et 4.(c) pouvaient être résolues par un développement du déterminant à l'aide de la formule de Laplace (développement d'un déterminant par rapport à une ligne) après des opérations sur les lignes/colonnes de la matrice considérée. Ces questions, un peu calculatoires mais assez faciles, n'ont pas été souvent bien traitées. La question 4.(d) était une simple application de la question 2) qui n'a posé aucune difficulté.

Pour la question 5), il ne fallait pas oublier que l'on admettait que non seulement les coefficients p_i et q_i pouvaient être choisis entiers mais également premiers dans leur ensemble. Pour la réponse à la question 5.(a), il suffisait de remarquer, comme la majorité des candidats ayant attaqué cette question, qu'un diviseur commun à tous les q_i diviserait tous les p_i, ce qui était exclu. Dans la question 5.(b), il fallait, comme indiqué dans l'énoncé, appliquer le théorème de Bezout dans $\mathbb{Q}$ aux polynômes P et Q premiers entre eux dans $\mathbb{C}[X]$ et donc dans $\mathbb{Q}[X]$. Le résultat s'obtenait en multipliant par exemple par le ppcm des dénominateurs des coefficients des polynômes obtenus dans l'égalité de Bezout. L'extension du résultat de la question 2) de la partie 1 demandée dans la question 5.(c) n'a généralement pas posé de difficultés à ceux qui avait bien rédigé leur réponse dans la partie 1. L'égalité $r = Q(Uf + V)$ appliquée en 0 donne $r = q_0(u_0c_0 + v_0)$. D'après la question précédente $u_0c_0 + v_0 = \gamma r$ avec $\gamma \in \mathbb{Z}$, on en déduit $1 = q_0\gamma$, ce qui n'est possible que si $q_0 = \gamma = \pm 1$. Ce raisonnement semble avoir posé des difficultés à certains candidats.

3 Partie 3

La partie 3 a été abordée par la plupart des candidats ayant traité la partie 2.

Les questions 1.(a) et 1.(b) (en suivant l'indication) ne posaient pas de problème, mais les correcteurs ont été très attentifs à la rédaction ; notamment, il fallait soigneusement justifier les opérations sur les lignes/colonnes pour la question 1 b). La question 1 c) était nettement plus difficile (on fera notamment attention au fait que la série $\sum a_m^2$ diverge, mais on peut s'appuyer sur la convergence rapide vers 0 des autres termes du produit pour compenser cet effet) et les plus rares candidats qui l'ont traitée ont été bien récompensés.

La question 2 était une application directe des résultats de la partie 2 ; il fallait néanmoins vérifier avec beaucoup d'attention les différentes hypothèses nécessaires.

La question 3 ne posait pas de difficulté particulière, mais il fallait faire attention aux différents domaines de validité des séries entières.

Les correcteurs ont également été attentifs à la rédaction de la question 4 (le plus simple étant de multiplier par $(1 - \theta z)$ l'identité qui venait d'être démontrée).

La question 5 était délicate et a été à nouveau très bien récompensée. Finalement, le dernier point était une question de synthèse qui a été assez souvent (bien) traitée.

4 Partie 4

La partie 4 étant indépendante des parties 2 et 3, elle a été abordée par beaucoup de candidats. Les correcteurs regrettent le manque de rigueur dont ont fait preuve de nombreux candidats dans le traitement de cette partie. Même les questions moins difficiles exigeaient une rédaction soignée.

La première question concernait la convergence d'un produit infini, l'utilisation du logarithme pour se ramener à l'étude d'une série a trop souvent été faite sans précautions.

Grace à l'indication suggérée, la question 2 ne présentait pas de difficulté.

A la question 3, les correcteurs ont été étonnés de lire souvent de mauvaises définitions de "$\Gamma(u) \nrightarrow 0$ lorque $u \to +\infty$". La construction des suites $(\lambda_s)_s$ et $(m_s)_s$ se faisait en deux temps, l'extraction de sous-suites étant nécessaire à la construction d'une suite $(\lambda_s)_s$ convergente.

La principale difficulté de la question 3 résidait dans le point (c) : un simple passage à la limite $s \to +\infty$ dans l'inégalité obtenue au (b) n'était pas possible, le paramètre s apparaissant à la fois dans le terme général et dans les bornes. Il fallait d'abord, à s fixé, obtenir une majoration des sommes partielles de la série à termes positifs $\sum_q \sin^2(\pi\lambda_s\theta^q)$ par une quantité indépendante de s, pour ensuite pouvoir effectuer le passage à la limite.

La dernière question a été très peu abordée. La partie (a) reposait sur la définition d'un nombre de Pisot : par l'absurde, on obtient une contradiction sur les racines du polynôme minimal de θ. Pour les parties (b) et (c), après utilisation du logarithme (licite grace au résultat prouvé au (a)), on se ramenait à l'étude de deux séries. Au (b), c'est un simple théorème de comparaison qui permettait de conclure ; au (c), il fallait en plus utiliser l'hypothèse que θ était un nombre de Pisot et le résultat rappelé au début de la Partie 4.